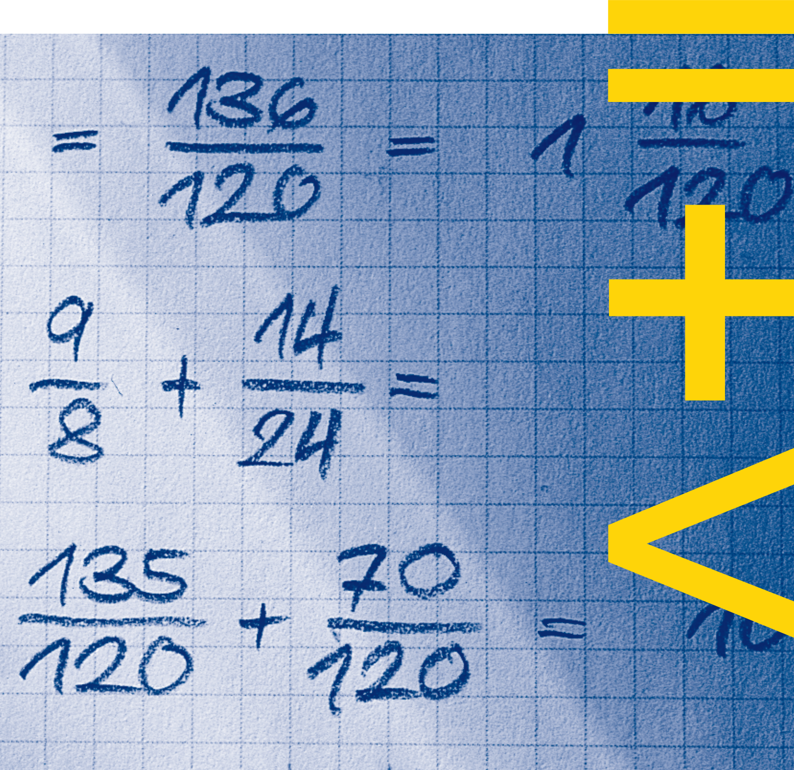
Rechnen für Schülerinnen und Schüler

www.aprentas.com

aprentas



Basiswissen in Arithmetik, Geometrie
und Algebra für eine naturwissenschaftliche oder
technische Lehre.

19. überarbeitete Auflage 2020/30 000 Expl.
Diese Broschüre darf nicht verkauft werden.

aprentas
Berufsinformation
WKL-438
Postfach, CH-4002 Basel
Tel. 061 468 18 00
Internet: www.aprentas.com

Redaktion: Thomas Gysin
Druck: Steudler Press AG, Basel

1210872

Inhaltsübersicht

Anordnungszeichen

$+$	plus	
$-$	minus	
$\cdot$	mal	(* Tastatur PC)
$:$	durch	(/ Tastatur PC)
$=$	gleich	
$\neq$	ungleich	
$\triangleq$	entspricht	
$>$	grösser als	($14 > 8$; 14 ist grösser als 8)
$<$	kleiner als	($8 < 14$; 8 ist kleiner als 14)
$\geqq$	grösser oder gleich	
$\leqq$	kleiner oder gleich	
$\sim$	proportional	
$\approx$	annähernd	
∞	unendlich	
$0{,}\overline{6}$	periodisch	(6 wiederholt sich unendlich)
Σ	Summe	(Sigma)

Griechisches Alphabet

Α	α	Alpha	Ν	ν	Ny
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
Ι	ι	Jota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	My	Ω	ω	Omega

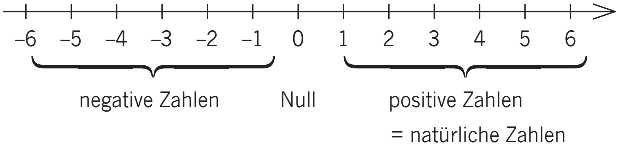
Naturwissenschaftliche Anwendungsbeispiele:

η	(Eta)	als Symbol (Formelzeichen = Grössenzeichen) für die Grösse Wirkungsgrad
Ω	(Omega)	als Abkürzung (Einheitenzeichen) für die Einheit Ohm
μ	(My)	als Abkürzung (Vorsatzzeichen) für den genormten Vorsatz Mikro = 10^{-6}

Zahlen und Potenzen

Rechnen mit ganzen Zahlen

Menge der ganzen Zahlen



Vorzeichen, Betrag, Gegenzahl

Betragszeichen

$|-2| = 2$

Vorzeichen Betrag

$|+5| = 5$

Zahl	→	**Gegenzahl**
3	→	(–3)
(–5)	→	5

Addition und Subtraktion

$(+a) + (+b) = a + b$	$(+a) - (+b) = a - b$
$(-a) + (-b) = -a - b$	$(-a) - (-b) = -a + b$
$(+a) + (-b) = a - b$	$(+a) - (-b) = a + b$
$(-a) + (+b) = -a + b$	$(-a) - (+b) = -a - b$

Operationszeichen

Multiplikation und Division

Gleiche Vorzeichen

$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b$
$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Operationszeichen

+ mal + gibt +
– mal – gibt +

Ungleiche Vorzeichen

$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$
$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$

+ mal – gibt –
– mal + gibt –

Bei der Division verhält es sich wie bei der Multiplikation:

$(+a) : (+b) = +(a : b)$
$(+a) : (-b) = -(a : b)$
$(-a) : (+b) = -(a : b)$
$(-a) : (-b) = +(a : b)$

+ durch + gibt +
+ durch – gibt –
– durch + gibt –
– durch – gibt +

Potenzen

Basis, Exponent

Exponent (Hochzahl)

$\mathbf{2^4}$ $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 Faktoren}} = 16$

Basis (Grundzahl)

Spezialfälle

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad 10^0 = 1$ $\quad 10^1 = 10$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$

Rechenregeln

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$

$10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$

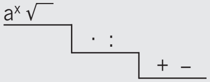
$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$

$(10^3)^2 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$

Addieren und subtrahieren kann man nur gleiche Potenzen!

$4a^2 + 3a^2 - 2a^2 = 5a^2$

Rechenhierarchie



Schreibweise Zehnerpotenz

$1\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{10^6} = 1$ Mega

Der Ausdruck **10^6** heisst **Zehnerpotenz** (6-te Potenz von 10)

Beispiele in Normdarstellung

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$2{,}9979 \cdot 10^8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Masse eines Elektrons	$9{,}1091 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

Wissenschaftlicher Anzeigemodus in Taschenrechnern
(Anzeigemodus Sci = Scientific).
In diesem Modus erscheinen die Zahlen in der Anzeige (Display), je nach Einstellung der angegebenen Anzahl Dezimalstellen, so wie an folgenden Beispielen erklärt:

$2\,500\,800 = 2{,}50 \cdot 10^6 = 2{,}50\ \mathrm{E6}$
$0{,}007847 = 7{,}85 \cdot 10^{-3} = 7{,}85\ \mathrm{E{-}3}$

Zahlwörter grosser Zahlen

1 Million	=	1000 Tausender	= 1 000 000	= 10^6
1 Milliarde	=	1000 Millionen	= 1 000 000 000	= 10^9
1 Billion	=	1000 Milliarden	= 1 000 000 000 000	= 10^{12}

Achtung Anwendung im englischen Sprachgebrauch unterschiedlich, z. B.

Deutsch	England	USA
1 Milliarde	1 milliard	1 billion = 1 000 000 000 = 10^9

Zahlensysteme

Dezimal-System (Zehner-System)

Im Dezimal-System verfügen wir über 10 Symbole mit den Ziffern:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Die Zahl 702 besteht aus den Ziffern **7, 0** und **2.**
Jede dieser Ziffern hat einen **Eigenwert** (Ziffernwert).

Bei der Zahl 702 (mehrstellige Zahl) hat zusätzlich jede Ziffer aufgrund ihrer Position einen anderen **Stellenwert.**

7 0 2

Wert der ersten Stelle

2 Einer $= 2 \cdot 1 = \mathbf{2 \cdot 10^0}$

Wert der zweiten Stelle

0 Zehner $= 0 \cdot 10 = \mathbf{0 \cdot 10^1}$

Wert der dritten Stelle

7 Hunderter $= 7 \cdot 100 = \mathbf{7 \cdot 10^2}$

Im Dezimal-System sind die Stellenwerte die Potenzen der Basis 10.

Zahl 702	**7**		**0**		**2**	
	$7 \cdot 10^2$	+	$0 \cdot 10^1$	+	$2 \cdot 10^0$	
	700	+	0	+	2	= 702

Dual-System (Zweier- oder Binär-System)

Das Dual-System verwendet die Zahl 2 als Basis und benützt die Ziffern Null (**Ø**) und Eins (**1**).

Computer arbeiten auf dieser Grundlage (Unterscheiden von zwei Zuständen).

Umrechnung vom Dezimal- in das Dualsystem

Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch die Zahl 2 dividiert.
Die Reste jedes Divisionsschrittes ergeben in umgekehrter Reihenfolge die Dualzahl.

Dezimalzahl 38

38 : 2 = 19	Rest 0
19 : 2 = 9	Rest 1
9 : 2 = 4	Rest 1
4 : 2 = 2	Rest 0
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 = 0	Rest 1

Dualzahl von 38 ≙ **1 Ø Ø 1 1 Ø**

Umrechnung vom Dual- in das Dezimalsystem

Im Dual-System sind die Stellenwerte die **Potenzen der Basis 2.**

Dualzahl 1 Ø Ø 1 1 Ø

1	Ø	Ø	1	1	Ø	
$1 \cdot \mathbf{2^5}$ +	$0 \cdot \mathbf{2^4}$ +	$0 \cdot \mathbf{2^3}$ +	$1 \cdot \mathbf{2^2}$ +	$1 \cdot \mathbf{2^1}$ +	$0 \cdot \mathbf{2^0}$	
32 +	0 +	0 +	4 +	2 +	0	= 38

Römisches Zahlensystem

I	≙ 1	X	≙ 10	XIX	≙ 19	C	≙ 100
II	≙ 2	XX	≙ 20	XXIX	≙ 29	CC	≙ 200
III	≙ 3	XXX	≙ 30	XXXIX	≙ 39	CCC	≙ 300
IV	≙ 4	XL	≙ 40	XLIX	≙ 49	CD	≙ 400
V	≙ 5	L	≙ 50	LIX	≙ 59	D	≙ 500
VI	≙ 6	LX	≙ 60	LXIX	≙ 69	DC	≙ 600
VII	≙ 7	LXX	≙ 70	LXXIX	≙ 79	DCC	≙ 700
VIII	≙ 8	LXXX	≙ 80	LXXXIX	≙ 89	DCCC	≙ 800
IX	≙ 9	XC	≙ 90	XCIX	≙ 99	CM	≙ 900
						M	≙ 1000

Umrechnung vom Römischen in das Dezimalsystem

DCCCLXXVI ≙ 876

D ≙ 500 CCC ≙ 300 L ≙ 50 XX ≙ 20 V ≙ 5 I ≙ 1

MCDXCIX ≙ 1499

M ≙ 1000 CD ≙ 400 XC ≙ 90 IX ≙ 9

Grundoperationen

Operationen erster Stufe

Addition

59	+	24	=	83	addieren oder «zusammenzählen»
Summand	+	Summand	=	Summe	

Subtraktion

34	–	16	=	18	subtrahieren oder «wegzählen»
Minuend	–	Subtrahend	=	Differenz	

Verbindung Operationen erster Stufe

$57 + 6 - 17 = 46$	Die Operationen werden in beliebiger Reihenfolge ausgeführt.
$23 + (4 - 11) = 16$	«Positive Klammer»
$23 + 4 - 11 = 16$	Beim Auflösen der Klammer bleiben die Vorzeichen.
$46 - (12 - 7) = 41$	«Negative Klammer»
$46 - 12 + 7 = 41$	Beim Auflösen der Klammer wechseln die Vorzeichen.

Operationen zweiter Stufe

Multiplikation

14	·	7	=	98	multiplizieren oder «vervielfachen»
Faktor	·	Faktor	=	Produkt	

Division

72	:	8	=	9	dividieren oder «teilen»
Dividend	:	Divisor	=	Quotient	

Verbindung Operationen zweiter Stufe

$35 \cdot 7 : 5 = 49$	Die Operationen werden in beliebiger Reihenfolge ausgeführt.
$20 \cdot (6 : 3) = 40$	Die Klammer hat also keine Bedeutung.
$(20 \cdot 6) : 3 = 40$	
$20 \cdot 6 : 3 = 40$	

Zusammengesetzte Rechenausdrücke

Verbindung Operationen erster und zweiter Stufe

54	+	$9 \cdot 3$	=	81	Die Operationen zweiter Stufe werden zuerst ausgeführt. «Punktrechnung vor Strichrechnung»
54	+	27	=	81	
2	·	(16 + 4)	=	40	Bei Operationen mit Klammer werden zuerst die Klammerausdrücke berechnet.
2	·	20	=	40	

Brüche

Bruch $\frac{3}{4}$

3 = **Zähler;** er zählt die Teile
4 = **Nenner;** er nennt die Aufteilung des Ganzen.

Jeder Bruch ist eine Division.

$\frac{3}{4}$ = 3 durch 4 = 3 : 4

Brucharten

Echter Bruch

$\frac{6}{7}$

Zähler < Nenner

Unechter Bruch

$\frac{7}{5}$, $\frac{5}{5}$

Zähler ≧ Nenner

Scheinbruch

$\frac{12}{4}$, $\frac{4}{4}$

Scheinbrüche sind spezielle unechte Brüche; die Division von Zähler durch Nenner ergibt eine ganze Zahl.

Gemischte Zahl

$2\frac{3}{4}$

Die gemischte Zahl besteht aus einer ganzen Zahl und einem Bruch.

Doppelbruch

$\frac{\frac{1}{4}}{3}$, $\frac{2}{\frac{5}{7}}$, $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$

Der Zähler, der Nenner oder beide sind Brüche.

Umwandlung der Brucharten

Ganze Zahl in Scheinbruch

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$$

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \cdots$$

Gemischte Zahl in unechten Bruch

$$4\frac{3}{8} = \frac{35}{8}$$

Die ganze Zahl wird mit dem gegebenen Nenner in einen Scheinbruch umgewandelt ...

$$4 \cdot \frac{8}{8} = \frac{32}{8}$$

$$\frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$$

... und zum Bruch addiert (siehe Addition und Multiplikation).

Unechter Bruch in gemischte Zahl

$$\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$17 : 4 = 4, \text{Rest } 1$$

Die Division des Bruchs ergibt die ganze Zahl, der Rest den Zähler des Bruchs.

Dezimalzahl in Bruch

$$0{,}875 = \frac{875}{1000}$$

Aufgrund der Anzahl Stellen nach dem Komma wird durch die entsprechende 10er-Potenz dividiert.

Bruch in Dezimalzahl

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\overline{3}$$

Der Zähler des Bruchs wird durch seinen Nenner dividiert.

Doppelbruch in Bruch

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

Der Doppelbruch wird umgewandelt, indem der Zähler mit dem **Kehrwert** des Nenners (reziproker Wert) multipliziert wird.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

$$\frac{5}{24} + \frac{1}{21} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{134}{168}$$

Bei Addition und Subtraktion von Brüchen unterschiedlicher Nenner sind diese in Brüche gleicher Nenner (gleichnamige Brüche) umzuwandeln.
Das kgV ist die kleinste Zahl, welche durch sämtliche Zahlen einer Zahlengruppe teilbar ist.

24, 21, 8, 6

Es errechnet sich aus allen beteiligten Nennern, durch Zerlegung in ihre **Primzahlfaktoren.**
Primzahlen sind nur durch 1 und sich selber teilbar:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 usw.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
24 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & & \\
21 & = & & & & & & & 3 & \cdot & 7 \\
8 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & & & & \\
6 & = & & & & & 2 & \cdot & 3 & & \\
\hline
& & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 7
\end{array}$$

Zerlegung aller Nenner in Primzahlfaktoren.

Alle Primzahlfaktoren der verschiedenen Nenner müssen im kgV enthalten sein.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

Das kgV wird durch Multiplikation dieser Primzahlfaktoren berechnet.

$$\frac{35}{168} + \frac{8}{168} + \frac{63}{168} + \frac{28}{168} = \frac{134}{168}$$

Der neue Nenner der Brüche entspricht dem kgV.
Die Zähler wurden dementsprechend erweitert (siehe Erweitern).

Erweitern

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10}$$

Der Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (siehe kgV) multipliziert werden. Der Wert des Bruches bleibt gleich.

Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

$$\frac{528}{360} = \frac{22}{15}$$

Mit dem ggT lassen sich Brüche auf ihre kleinst mögliche Form kürzen.

$$\frac{528}{360} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}$$

Zähler und Nenner werden in ihre **Primzahlfaktoren** zerlegt.

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad\quad 3$$

Gemeinsame Primzahlen.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Der ggT wird durch Multiplikation der gemeinsamen Primzahlfaktoren berechnet.

$$\frac{528 : 24}{360 : 24} = \frac{22}{15}$$

Zähler und Nenner werden durch den ggT geteilt.

Kürzen

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{6 : 2}{16 : 2} = \frac{3}{8}$$

Der Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (siehe ggT) dividiert werden. Der Wert des Bruches bleibt gleich.

Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Brüche gleicher Nenner werden addiert oder subtrahiert, indem die Zähler addiert oder subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird.

Ungleichnamige Brüche

$$\frac{23}{24} - \frac{3}{8} + \frac{11}{20} = \frac{136}{120}$$

$$\frac{115}{120} - \frac{45}{120} + \frac{66}{120} = \frac{136}{120}$$

Brüche verschiedener Nenner werden durch Erweitern mittels des kgV gleichnamig gemacht, dann erfolgt die Berechnung wie bei den gleichnamigen Brüchen.

Multiplikation

Echte und unechte Brüche

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{32}{35}$$

$$\frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{32}{35}$$

Bei Brüchen werden Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Ganze Zahl mit Bruch

$$7 \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 10} = \frac{21}{10}$$

Die ganze Zahl wird in einen Scheinbruch umgewandelt.

Gemischte Zahl mit Bruch

$$5\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{111}{35}$$

$$\frac{37 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{111}{35}$$

Die gemischte Zahl wird in einen unechten Bruch umgewandelt.

Doppelbruch mit Bruch

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{3 \cdot 7 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

Der Doppelbruch wird umgewandelt, indem der Zähler mit dem **Kehrwert** des Nenners (reziproker Wert) multipliziert wird.

Division

$$4\frac{3}{7} : 5 = \frac{31}{35}$$

$$\frac{31 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \frac{31}{35}$$

Die Division wird durch Umkehrung des Divisors (reziproker Wert) zur Multiplikation.

Zuordnung (Dreisatz)

Direkt proportionale Zuordnung

$\Uparrow$ **«Je mehr, desto mehr; je weniger, desto weniger!»** $\Uparrow$

Aus 57 Liter Milch gewinnt man 3 Kilogramm Butter.

Die Vielfachen stehen in einem direkten Verhältnis zueinander.

Wie viele Liter Milch benötigt man für 5 Kilogramm Butter?

3 kg Butter aus 57 L Milch

1 kg Butter aus 19 L Milch — 3-mal weniger

5 kg Butter aus x = $\underline{\underline{95\ \text{L}}}$ Milch — 5-mal so viel

$$\left.\begin{array}{l}3\ \text{kg}\\1\ \text{kg}\\5\ \text{kg}\end{array}\right|\ \frac{57\ \text{L} \cdot 5\ \text{kg}}{3\ \text{kg}} = \underline{\underline{95\ \text{L}}}$$

Schematische Schreibweise

Kurzfassung

$$\Downarrow\ \begin{array}{lcl}3\ \text{kg} & \longrightarrow & 57\ \text{L}\\5\ \text{kg} & \longrightarrow & x\end{array}\ \Downarrow$$

$$x = \frac{57\ \text{L} \cdot 5\ \text{kg}}{3\ \text{kg}} = \underline{\underline{95\ \text{L}}}$$

Indirekt proportionale Zuordnung

«Je mehr, desto weniger; je weniger, desto mehr!»

Bei einem Arbeitsweg von 45 Kilometern reicht der volle Benzintank 10 Tage.

Die Vielfachen stehen im umgekehrten Verhältnis zueinander.

Wie viele Tage reicht er bei nur 18 Kilometern Arbeitsweg?

Für 45 km reicht er	10 Tage	
Für 1 km reicht er	450 Tage	45-mal so lange
Für 18 km reicht er	x = $\underline{\underline{\text{25 Tage}}}$	den 18-ten Teil so lange

$$\begin{array}{r|l} 45\text{ km} & \\ 1\text{ km} & \dfrac{10\text{ Tage} \cdot 45\text{ km}}{18\text{ km}} = \underline{\underline{25\text{ Tage}}} \\ 18\text{ km} & \end{array}$$

Schematische Schreibweise

Kurzfassung

$$\begin{array}{lcl} 45\text{ km} & \longrightarrow & 10\text{ d} \\ 18\text{ km} & \longrightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{10\text{ d} \cdot 45\text{ km}}{18\text{ km}} = \underline{\underline{25\text{ d}}}$$

Proportion

Verhältnis I = Verhältnis II

Die Proportion ist die Gleichung von zwei gleichwertigen Verhältnissen (Verhältnisgleichung).

$$\underbrace{32 : \overbrace{8 = 4}^{\textbf{Innenglieder}} : 1}_{\textbf{Aussenglieder}}$$

In jeder Proportion ist das Produkt der **Innenglieder ...**

... gleich dem Produkt der **Aussenglieder.**

$$32 : x = 4 : 1$$

Ist eines der 4 Glieder unbekannt, wird es als x bezeichnet.

$$4 \cdot x = 32 \cdot 1$$

Produktegleichung

$$x = \frac{32 \cdot 1}{4} = \underline{\underline{8}}$$

Die bekannten Aussenglieder werden multipliziert und durch das bekannte Innenglied dividiert.

Direkte Proportion

3 T-Shirts kosten CHF 30,00.

Die Vielfachen stehen im direkten Verhältnis zueinander: «Je mehr Ware, desto grösser die Kosten!»

Wie viel kosten 21 T-Shirts?

$$3 \text{ Stück} : 21 \text{ Stück} = \text{CHF } 30{,}00 : \text{CHF } x$$

$$x = \frac{\text{CHF } 30{,}00 \cdot 21 \text{ Stück}}{3 \text{ Stück}} = \underline{\underline{\text{CHF } 210{,}00}}$$

Indirekte Proportion

4 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 16 Tagen.

Die Vielfachen stehen im indirekten Verhältnis zueinander: «Je mehr Arbeiter, desto weniger Zeit wird benötigt!»

Wie viele Tage benötigen 8 Arbeiter dafür?

$$4 \text{ Arbeiter} : 8 \text{ Arbeiter} = x \text{ Tage} : 16 \text{ Tage}$$

$$x = \frac{4 \text{ Arbeiter} \cdot 16 \text{ Tage}}{8 \text{ Arbeiter}} = \underline{\underline{8 \text{ Tage}}}$$

Vergleich mit der Darstellung DREISATZ

$$\Downarrow \begin{array}{lcl} 4 \text{ Arbeiter} & \longrightarrow & 16 \text{ d} \\ 8 \text{ Arbeiter} & \longrightarrow & x \end{array} \Uparrow$$

$$x = \frac{16 \text{ d} \cdot 4 \text{ Arbeiter}}{8 \text{ Arbeiter}} = \underline{\underline{8 \text{ d}}}$$

Vielsatz

4 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 25 Tagen, wenn sie pro Tag 8 Stunden arbeiten.
Wie viele Tage benötigen 8 Arbeiter dafür, wenn sie pro Tag 10 Stunden arbeiten?

$$\Downarrow \begin{array}{lc} 4 \text{ Arbeiter} & \longrightarrow \\ 8 \text{ Arbeiter} & \longrightarrow \end{array} \Uparrow \begin{array}{lc} 25 \text{ d} & \longrightarrow \\ x & \longrightarrow \end{array} \Downarrow \begin{array}{r} 8 \text{ h} \\ 10 \text{ h} \end{array}$$

$$x = \frac{25 \text{ d} \cdot 4 \text{ Arbeiter} \cdot 8 \text{ h}}{8 \text{ Arbeiter} \cdot 10 \text{ h}} = \underline{\underline{10 \text{ d}}}$$

Prozent und Promille

Prozent

Abkürzung **%** pro centum heisst «für hundert»

Wie viele Franken sind 4% von 250 Franken?

100%	$\triangleq$	CHF 250,00	$\triangleq$ dem Ganzen der Grösse ($\frac{100}{100}$)
1%	$\triangleq$	CHF 2,50	$\triangleq$ dem 0,01fachen der Grösse ($\frac{1}{100}$)
4%	$\triangleq$ x =	CHF 10,00	$\triangleq$ dem 0,04fachen der Grösse ($\frac{4}{100}$)

$$x = \frac{\text{CHF } 250{,}00 \cdot 4\%}{100\%} = \underline{\underline{\text{CHF } 10{,}00}}$$

Promille

Abkürzung **‰** pro mille heisst «für tausend».

15 Meter Draht dehnen sich beim Erwärmen um 6‰ aus.

Wie viele Zentimeter beträgt die Ausdehnung?

1000‰	$\triangleq$	1500,0 cm	$\triangleq$ dem Ganzen der Grösse ($\frac{1000}{1000}$)
1‰	$\triangleq$	1,5 cm	$\triangleq$ dem 0,001fachen der Grösse ($\frac{1}{1000}$)
6‰	$\triangleq$ x =	9,0 cm	$\triangleq$ dem 0,006fachen der Grösse ($\frac{6}{1000}$)

$$x = \frac{1500 \text{ cm} \cdot 6‰}{1000‰} = \underline{\underline{9{,}0 \text{ cm}}}$$

Rabatt/Skonto

Rabatt	Preisnachlass (in %) beim Kauf einer Ware.
Skonto	Preisnachlass (in %) bei Barzahlung einer Rechnung (innerhalb einer festgesetzten Frist).

Für einen Verkaufspreis von CHF 4400,00 erhielt der Kunde 10% Rabatt und 2% Skonto, bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen.
Wie gross ist der Zahlungsbetrag?

Verkaufspreis
– Rabatt
Rechnungsbetrag
– Skonto
Zahlungsbetrag

100%	≙	CHF 4400,00	Verkaufspreis
10%	≙	x	Rabatt in Prozent

$$x = \frac{\text{CHF } 4400{,}00 \cdot 10\%}{100\%} = \text{CHF } 440{,}00 \quad \text{Rabatt in Franken}$$

$$\begin{array}{rl} \text{CHF } 4400{,}00 & \\ -\ \text{CHF } 440{,}00 & \\ \hline \text{CHF } 3960{,}00 & \text{Rechnungsbetrag} \end{array}$$

100%	≙	CHF 3960,00	
2%	≙	y	Skonto in Prozent

$$y = \frac{\text{CHF } 3960{,}00 \cdot 2\%}{100\%} = \text{CHF } 79{,}20 \quad \text{Skonto in Franken}$$

$$\begin{array}{rl} \text{CHF } 3960{,}00 & \\ -\ \text{CHF } 79{,}20 & \\ \hline \text{CHF } 3880{,}80 & \text{Zahlungsbetrag} \\ \hline\hline \end{array}$$

Zins

Begriffe

Zins

Abkürzung **Z**	Der Zins ist die Vergütung für die leihweise Überlassung eines Objektes (Pacht-/Mietzins) oder einer Geldsumme.

Kapital

Abkürzung **K**	Das Kapital (Kredit oder Hypothek) ist die geliehene Geldsumme. Dieser Grundwert beträgt immer 100%.

Zinsfuss

Abkürzung **p**	Der Zinsfuss ist die prozentuale Vergütung des Kapitals in einem Jahr.

Zeit

Abkürzung **t**	Die Zeit (Laufzeit) eines Kapitals wird in Tagen, Monaten oder Jahren gerechnet.
Kaufmännisches Rechnen	1 Monat $\triangleq$ 30 Tagen 1 Jahr $\triangleq$ 360 Tagen
Naturwissenschaftliches Rechnen	1 a = 365 d

Zinsberechnung

Auf einem Sparbuch sind CHF 3260,00 zu einem Zinsfuss von 4,5% angelegt.

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t\ (\text{Anzahl Tage})}{100\% \cdot 360\ (\text{Tage})}$$

Wie viel Franken beträgt der Jahreszins?

100%	$\triangleq$ CHF 3260,00	Kapital
4,5%	$\triangleq$ x	Zinsfuss

$$x = \frac{\text{CHF } 3260{,}00 \cdot 4{,}5\%}{100\%} = \underline{\underline{\text{CHF } 146{,}70}}$$

Jahreszins
Bei Jahreszinsberechnungen wird die Laufzeit weggelassen.

Kapitalberechnung

Bei einem Zinsfuss von 3% erhält man einen Jahreszins von CHF 196,50

$$K = \frac{Z \cdot 100\% \cdot 360\ (\text{Tage})}{p \cdot t\ (\text{Anzahl Tage})}$$

Wie gross ist das Kapital?

3%	$\triangleq$ CHF 196,50	Jahreszins
100%	$\triangleq$ x	Grundwert

$$x = \frac{\text{CHF } 196{,}50 \cdot 100\%}{3\%} = \underline{\underline{\text{CHF } 6550{,}00}}$$

Kapital
Die Laufzeit wird weggelassen.

Zinsfussberechnung

Ein Darlehen von CHF 4000,00 wird mit einem Betrag von CHF 4272,00 nach 8 Monaten zurückbezahlt.

$$p = \frac{Z \cdot 100\%}{K} \;\Big|\; \frac{\cdot\, 360 \text{ (Tage)}}{\cdot\, t \text{ (Anzahl Tage)}}$$

Wie viele Prozent beträgt der Zinsfuss?

CHF 4272,00	Rückzahlungsbetrag (8 Monate)
– CHF 4000,00	Kapital
CHF 272,00	Zins (für 8 Monate)

$$\begin{array}{lcl} 8 \text{ Monate} & \triangleq & \text{CHF } 272{,}00 \\ 12 \text{ Monate} & \triangleq & x \end{array}$$

$$x = \frac{\text{CHF } 272{,}00 \cdot 12 \text{ Monate}}{8 \text{ Monate}} = \text{CHF } 408{,}00 \quad \text{Jahreszins}$$

$$\begin{array}{lcll} \text{CHF } 4000{,}00 & \triangleq & 100\% & \text{Kapital} \\ \text{CHF } 408{,}00 & \triangleq & y & \text{Jahreszins} \end{array}$$

$$y = \frac{100\% \cdot \text{CHF } 408{,}00}{\text{CHF } 4000{,}00} = \underline{\underline{10{,}2\%}} \quad \text{Zinsfuss}$$

Prinzip Vielsatz

$$\begin{array}{llllll} & \text{Zinsfuss} & & \text{Zins} & & \text{Laufzeit} \\ \Downarrow & 100\% & \longrightarrow \Downarrow & \text{CHF } 4000{,}00 & \longrightarrow \Uparrow & 12 \text{ Monate} \\ & p & \longrightarrow & \text{CHF } 272{,}00 & \longrightarrow & 8 \text{ Monate} \end{array}$$

$$p = \frac{100\% \cdot \text{CHF } 272{,}00 \cdot 360 \text{ Tage}}{\text{CHF } 4000{,}00 \cdot 240 \text{ Tage}} = \underline{\underline{10{,}2\%}}$$

Zusammengefasst auf einem Bruchstrich.

Zeitberechnung

CHF 4000,00 werden auf einem Sparkonto zu 4% verzinst.

$$t = \frac{Z \cdot 100\% \cdot 360\ (\text{Tage})}{K \cdot p}$$

Wie viele Tage muss das Kapital auf der Bank angelegt werden, damit der Zins CHF 124,00 beträgt?

100%	$\triangleq$	CHF 4000,00	Kapital
4%	$\triangleq$	x	Zinsfuss

$$x = \frac{\text{CHF } 4000{,}00 \cdot 4\%}{100\%} = \text{CHF } 160{,}00 \quad \text{Jahreszins}$$

CHF 160,00	$\triangleq$	360 Tagen
CHF 124,00	$\triangleq$	y

$$y = \frac{360 \text{ Tage} \cdot \text{CHF } 124{,}00}{\text{CHF } 160{,}00} = \underline{\underline{279 \text{ Tage}}} \quad \text{Laufzeit}$$

Prinzip Vielsatz

Laufzeit		Zinsfuss		Zins
⇩ 360 d	⟶	⇧ 100%	⟶	⇩ CHF 4000,00
t	⟶	4%	⟶	CHF 124,00

$$t = \frac{\text{CHF } 124{,}00 \cdot 100\% \cdot 360 \text{ Tage}}{\text{CHF } 4000{,}00 \cdot 4\%} = \underline{\underline{279 \text{ Tage}}}$$

Zusammengefasst auf einem Bruchstrich.

Masseinheiten

Vorsätze für Teile oder Vielfache

Die Vorsätze für dezimale Teile oder Vielfache von Masseinheiten vereinfachen die Schreibweise grosser oder extrem kleiner Messwerte:

T	Tera	10^{12}	1 000 000 000 000
G	Giga	10^{9}	1 000 000 000
M	Mega	10^{6}	1 000 000
k	Kilo	10^{3}	1 000
h	Hekto	10^{2}	100
da	Deka	10^{1}	10
d	Dezi	10^{-1}	0,1
c	Zenti	10^{-2}	0,01
m	Milli	10^{-3}	0,001
µ	Mikro	10^{-6}	0,000 001
n	Nano	10^{-9}	0,000 000 001
p	Piko	10^{-12}	0,000 000 000 001

Die Vorsatzzeichen sind ohne Zwischenraum vor die entsprechende SI-Einheit zu setzen, z.B. km, cm, mm, µm, nm.

SI-Einheiten (Système International d'Unités)

Physikalische Gesetze beruhen auf mathematischen Beziehungen zwischen verschiedenen Grössen, die in definierten Einheiten messbar sind.
Um eine einfache Darstellung von Formeln zu ermöglichen, wird jede Grösse durch ein Symbol (Formelzeichen) und jede Einheit durch ein Zeichen (Abkürzung) dargestellt.

Beispiel: Die Grösse Arbeit hat das Symbol W und die Einheit Joule (J).
Die Grösse Leistung hat das Symbol P und die Einheit Watt (W).

Beim Erstellen oder Interpretieren einer Formel ist daher eine exakte Unterscheidung zwischen Symbol einer Grösse und dem Zeichen einer Einheit nötig.

SI-Basiseinheiten

Basisgrösse	Symbol	Basiseinheit	Zeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_ν	Candela	cd

Alle weiteren Grössen und Einheiten lassen sich basierend auf diesen sieben Basisgrössen resp. Basiseinheiten ableiten.

Beispiele abgeleiteter Grössen und abgeleiteter Einheiten:

$$\text{Länge} \cdot \text{Länge} = \text{Fläche} \qquad \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$$

$$\text{Länge}^3 = \text{Volumen} \qquad \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^3$$

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \text{Geschwindigkeit} \qquad \text{m} : \text{s} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \text{Dichte} \qquad \text{kg} : \text{m}^3 = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Formeln mit genormter Symbolik (Formelzeichen)

Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Dichte

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Länge *l* (Strecke *s*, Höhe *h*, ...)

SI-Einheit: **m** Meter

weitere Einheiten

km	Kilometer	1 km	=	10^3 m	=	1000 m
dm	Dezimeter	1 dm	=	10^{-1} m	=	0,1 m
cm	Zentimeter	1 cm	=	10^{-2} m	=	0,01 m
mm	Millimeter	1 mm	=	10^{-3} m	=	0,001 m
µm	Mikrometer	1 µm	=	10^{-6} m	=	0,000 001 m
nm	Nanometer	1 nm	=	10^{-9} m	=	0,000 000 001 m

Fläche *A*

SI-Einheit: **m²** Quadratmeter

weitere Einheiten

km^2	Quadratkilometer	1 km^2	=	10^6 m^2	=	1 000 000 m^2
ha	Hektare	1 ha	=	10^4 m^2	=	10 000 m^2
a	Are	1 a	=	10^2 m^2	=	100 m^2
dm^2	Quadratdezimeter	1 dm^2	=	10^{-2} m^2	=	0,01 m^2
cm^2	Quadratzentimeter	1 cm^2	=	10^{-4} m^2	=	0,0001 m^2
mm^2	Quadratmillimeter	1 mm^2	=	10^{-6} m^2	=	0,000 001 m^2

Volumen *V*

SI-Einheit: **m³** Kubikmeter

weitere Einheiten

dm^3	Kubikdezimeter	$1\ dm^3$	=	$10^{-3}\ m^3$	=	0,001	m^3
cm^3	Kubikzentimeter	$1\ cm^3$	=	$10^{-6}\ m^3$	=	0,000 001	m^3
mm^3	Kubikmillimeter	$1\ mm^3$	=	$10^{-9}\ m^3$	=	0,000 000 001	m^3
hL	Hektoliter	1 hL	=	$10^2\ dm^3$	=	100	dm^3
L	Liter	1 L	=	$1\ dm^3$	=	1000	cm^3
dL	Deziliter	1 dL	=	$10^{-1}\ dm^3$	=	100	cm^3
cL	Zentiliter	1 cL	=	$10^{-2}\ dm^3$	=	10	cm^3
mL	Milliliter	1 mL	=	$10^{-3}\ dm^3$	=	1	cm^3
µL	Mikroliter	1 µL	=	$10^{-6}\ dm^3$	=	10^{-3}	cm^3

Masse *m*

SI-Einheit: **kg** Kilogramm

weitere Einheiten

t	Tonne	1 t	=	10^3 kg	=	1000 kg
g	Gramm	1 g	=	10^{-3} kg	=	0,001 kg
mg	Milligramm	1 mg	=	10^{-6} kg	=	0,000 001 kg
µg	Mikrogramm	1 µg	=	10^{-9} kg	=	0,000 000 001 kg

Netto	Masse einer Ware
Tara	Masse der Verpackung
Brutto	Masse der Ware plus Masse der Verpackung

Zeit *t*

SI-Einheit: **s** Sekunde

weitere Einheiten

1 Jahr	= 1 a	= 12 Monate	= 365 Tage (Schaltjahr 366 Tage)	
1 Tag	= 1 d	= 24 Stunden	= 1440 Minuten	= 86 400 s
1 Stunde	= 1 h	= 60 Minuten	= 3600 Sekunden	
1 Minute	= 1 min	= 60 Sekunden		

Bruchteile einer Sekunde werden in Zehntel-, Hundertstel-, Tausendstel-Sekunden angegeben.

1 ms = 1 Millisekunde = 10^{-3} s

Temperatur *T*

SI-Einheit: **K** Kelvin

weitere Einheit

Grad Celsius	0 °C = 273 K
	100 °C = 373 K

Druck *p*

SI-Einheit: **Pa** Pascal

weitere Einheiten

bar	Bar	1 bar	= 10^5 Pa	= 100 000 Pa
mbar	Millibar	1 mbar	= 10^2 Pa	= 100 Pa
hPa	Hektopascal	1 hPa	= 10^2 Pa	= 100 Pa

Normaldruck:
1013 mbar = 1013 hPa

Dichte ρ (rho)

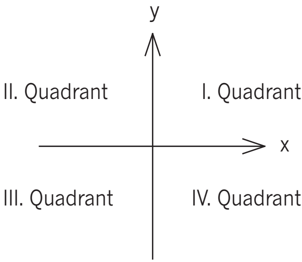
SI-Einheit: $\mathbf{kg \cdot m^{-3}}$

weitere Einheiten

im Labor	bei Flüssigkeiten	g/mL	= g/cm^3
	bei Gasen	g/L	= g/dm^3
	bei Werkstoffen	kg/dm^3	

Koordinatensystem

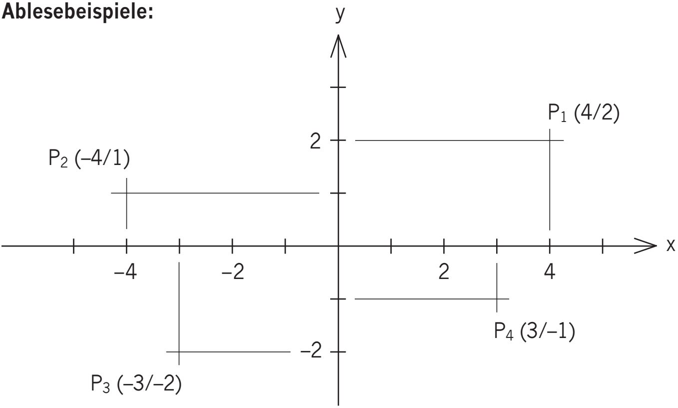
Bezeichnungen im rechtwinkligen Koordinatensystem



x-Achse = Abszisse
y-Achse = Ordinate

x = unabhängige Variable
y = abhängige Variable

Ablesebeispiele:



Geometrie

Symbole	△	Dreieck
	⊿	Winkelmass ≙ 90° (Bogengrade)
Bezeichnungen	A, B, C, …	Punkte
	a, b, c, …	Seiten
		(beim △ gegenüber A, B, C)
	u	Umfang
	A	Flächeninhalt
	$h_{a\ (b,\ c)}$	Höhe über a (b, c)
	m	Mittelparallele im Trapez
	M	Kreismittelpunkt
	r	Radius
	π	Pi ≙ 3,1416 …
	α, β, γ, …	Winkel
	s	Sehne
	t	Tangente
	b	Bogenlänge
	G	Grundfläche
	O	Oberfläche
	V	Volumen (Rauminhalt)
	M	Mantelfläche
	h	Körperhöhe

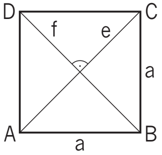
Gerade

Strahl

Strecke

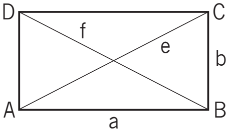
Planimetrie

Quadrat



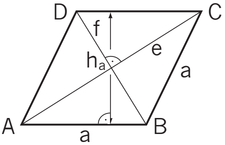
$$u = 4a$$
$$A = a^2$$
$$A = \frac{e^2}{2} = \frac{f^2}{2}$$

Rechteck



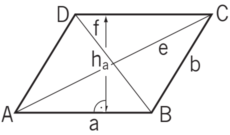
$$u = 2a + 2b$$
$$A = a \cdot b$$

Rhombus



$$u = 4a$$
$$A = a \cdot h_a$$
$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

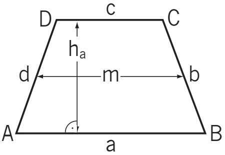
Rhomboid



$$u = 2a + 2b$$
$$A = a \cdot h_a$$

Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid sind alles Parallelogramme.

Trapez

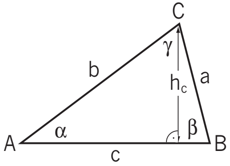


$$u = a + b + c + d$$

$$m = \frac{a + c}{2}$$

$$A = m \cdot h_a = \frac{a + c}{2} \cdot h_a$$

Dreieck

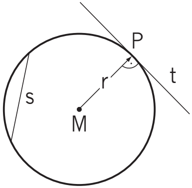


$$u = a + b + c$$

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

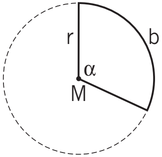
Kreis



$u = 2r\pi$
$A = r^2\pi$

s = Sehne
t = Tangente
P = Berührungspunkt

Kreisausschnitt (Sektor)

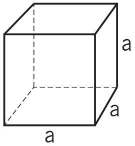


$$b = \frac{2r\pi \cdot \alpha}{360°}$$

$$A = \frac{b \cdot r}{2}$$

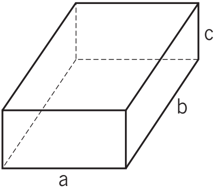
Stereometrie

Würfel



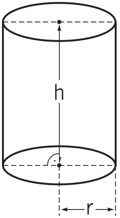
$G = a^2$
$M = 4a^2$
$O = 6a^2$
$V = a^3$

Quader



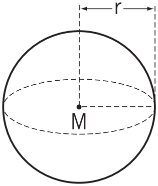
$M = 2\,(ac + bc)$
$O = 2\,(ab + ac + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$

Zylinder



$G = r^2\pi$
$M = 2r\pi \cdot h$
$O = M + 2G$
$O = 2r\pi \cdot h + 2r^2\pi$
$V = r^2\pi \cdot h$

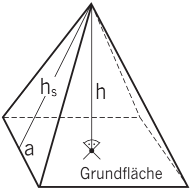
Kugel



$$O = 4r^2\pi$$

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

Regelmässige Pyramide



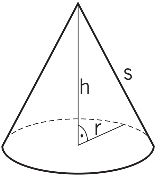
$$G = a^2$$

$$M = \frac{4a \cdot h_s}{2}$$

$$O = M + G$$

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Kreiskegel



$$G = r^2\pi$$

$$M = r \cdot \pi \cdot s$$

$$O = M + G$$

$$O = r \cdot \pi\,(r + s)$$

$$V = \frac{r^2\pi \cdot h}{3}$$

Gleichungen (Algebra)

Grundregeln

Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens darf man:

a) die gleiche Zahl (Variable) addieren oder subtrahieren.
b) mit der gleichen Zahl (Variablen) multiplizieren oder mit der gleichen Zahl (Variablen), wenn $\neq 0$, dividieren.

Stets äquivalent umformen!

Beispiel allgemein:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{2} + 2 = 4 \quad \Big| \cdot 10 \text{ (Hauptnenner)}$$

$$10\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{2} + 2\right) = 10 \cdot 4$$

$$4x + 15 + 20 = 40$$

$$4x + 35 = 40 \quad \Big| -35$$

$$4x = 5 \quad \Big| : 4$$

$$\underline{\underline{x = \frac{5}{4}}}$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiele: Umstellung von Formeln

Umfang Rechteck: $U = 2a + 2b$ $\quad a = ?$

$$U - 2b = 2a$$

$$a = \frac{U - 2b}{2} = \frac{U}{2} - b$$

Umfang Kreis: $U = 2r\pi$ $\quad r = ?$

$$r = \frac{U}{2\pi}$$

Mittellinie Trapez: $m = \frac{a + c}{2}$ $\quad c = ?$

$$2m = a + c$$

$$c = 2m - a$$

Massenanteil w des Stoffes x in einer Lösung:

$$w(x) = \frac{m(x)}{m(x) + m(Lsm)} \qquad m(Lsm) = ?$$

$$a = \frac{b}{b + x} \qquad x = ?$$

$$a \cdot (b + x) = b$$

$$ab + ax = b$$

$$ax = b - ab = b \cdot (1 - a)$$

$$x = \frac{b - ab}{a} = \frac{b}{a} - b$$

Rechnen mit Messwerten

Messwerte sind grundsätzlich Werte mit einer bestimmten Unsicherheit, also einer eingeschränkten Genauigkeit. Sie ist durch das Messverfahren, mit dem der Messwert gewonnen wurde, bestimmt.

Messwerte oder Ergebnisse von Berechnungen mit Messwerten sind deshalb nur so genau anzugeben, als es die Genauigkeit des Messverfahrens erlaubt, mit dem die Messwerte erhalten wurden.

Beim Rechnen mit Messwerten ist die Kenntnis einiger Fachausdrücke und Vereinbarungen von Bedeutung. Dies sind die **signifikanten Ziffern** und das **Runden**.

Signifikante Ziffern

Unter den signifikanten Ziffern versteht man die Ziffern eines Messwertes oder Rechenergebnisses, die berücksichtigt werden müssen und nicht weggelassen werden dürfen.

Man bezeichnet sie deshalb auch als zu *berücksichtigende Ziffern* oder als *geltende Ziffern*.

Der Messwert eines bestimmten Messgerätes wird mit einer bestimmten Ziffernzahl angezeigt oder kann mit einer bestimmten Ziffernzahl abgelesen werden. Diese Ziffern sind die signifikanten Ziffern des Messwertes.

Die verschiedenen Messgeräte ergeben Messwerte mit unterschiedlich vielen signifikanten Ziffern.

Beispiel:

Laborwaage:	Analysenwaage:	Bürette:
$m = \underbrace{175,6}$ g	$m = \underbrace{74,2140}$ g	$V = \underbrace{8,36}$ mL
vier signifikante Ziffern	sechs signifikante Ziffern	drei signifikante Ziffern

Besondere Aufmerksamkeit ist der Ziffer Null (0) in Dezimalzahlen zu schenken. Die Nullen am Ende einer Dezimalzahl gehören zu den signifikanten Ziffern. Die am Anfang einer Zahl stehenden Nullen sind keine signifikanten Ziffern.

Beispiel:

Laborwaage:

$$m = \underbrace{0{,}0}_{\text{keine signifikanten Ziffern}}\underbrace{750}_{\text{drei signifikante Ziffern}}\ \text{g}$$

$$m = \underbrace{0{,}00}_{\text{keine signifikanten Ziffern}}\underbrace{75}_{\text{zwei signifikante Ziffern}}\ \text{g}$$

$$m = \underbrace{0{,}00}_{\text{keine signifikanten Ziffern}}\underbrace{7}_{\text{eine signifikante Ziffer}}\ \text{g}$$

Die Anzahl der signifikanten Ziffern eines Messwertes darf nicht durch Anhängen einer Null oder durch Weglassen einer Null am Ende verändert werden.

Beispiel:

Der Messwert einer Laborwaage (mit 0,1 g-Anzeige), der z.B. mit 175,6 g angezeigt wird, darf nicht als m = 175,60 g geschrieben werden oder der Messwert einer Analysenwaage (mit 0,1 mg-Anzeige), der z.B. mit 74,2140 g angezeigt wird, darf nicht als m = 74,214 g angegeben werden.

Runden

Beim Runden wird die Stellenzahl einer rechnerisch ermittelten, vielstelligen Dezimalzahl auf eine gewünschte Stellenzahl verringert. Man unterscheidet aufrunden und abrunden. Liegt der Zahlenwert der Ziffer nach der Rundestelle zwischen 0 und 4, dann wird der Rundestellenwert beibehalten, d.h. es wird **abgerundet**.

Beispiel: Zu rundende Zahl: **24,2469**; auf 3. Stelle von links

Gewünschte Ziffernzahl: 3	Runde-stelle	Diese Ziffer entscheidet über das Auf- oder Abrunden. Sie beträgt 4: also wird die Rundestelle beibehalten.	Diese Ziffern bleiben ausser Betracht.

Die gerundete Zahl lautet: ≈ **24,2**

Wenn der Zahlenwert der Ziffer nach der Rundestelle zwischen 5 und 9 beträgt, dann wird der Rundestellenwert um eins erhöht, also wird **aufgerundet**.

Beispiel: Zu rundende Zahl: **9,37481**; auf 4. Stelle von links

Gewünschte Ziffernzahl: 4	Runde-stelle	Diese Ziffer entscheidet über das Auf- oder Abrunden. Sie beträgt 8: also wird die Rundestelle um eins erhöht.	Diese Ziffern bleiben ausser Betracht.

Die gerundete Zahl lautet: ≈ **9,375**

Das gerundete Ergebnis wird durch ein Rundungszeichen ≈ gekennzeichnet.

Rechnen mit Messwerten ohne angegebene Unsicherheit

Bei Messwerten ohne angegebene Unsicherheit (Genauigkeit) wird angenommen, dass die vorletzte Stelle des Zahlenwertes sicher (genau) ist, während die letzte Stelle als unsicher (ungenau) anzusehen ist.

Beim Rechnen mit Messwerten ohne angegebene Unsicherheit müssen einige Regeln beachtet werden.

Addieren und Subtrahieren

Beim **Addieren und Subtrahieren** von Messwerten mit unterschiedlichen **Nachkommastellen** (Dezimalstellen) darf das Ergebnis nur mit so vielen Nachkommastellen angegeben werden, wie der Messwert mit der geringsten Zahl von Nachkommastellen besitzt.

Beispiel:

Es werden 3 Stoffportionen gemischt, deren Massen auf unterschiedlichen Waagen bestimmt wurden:
m_1 = 158,4 g, m_2 = 16,38 g, m_3 = 2,4072 g.

$$\begin{array}{r l} 158{,}4 & \text{g} \\ 16{,}38 & \text{g} \\ \underline{2{,}4072} & \underline{\text{g}} \\ 177{,}1872 & \text{g} \end{array}$$

Welches Ergebnis kann angegeben werden?

Lösung:

Rein rechnerisch ergibt sich der Zahlenwert *m* = 177,1872 g. Das Ergebnis darf jedoch nur mit **einer** Nachkommastelle angegeben werden. Aufgerundet lautet das Ergebnis ***m* = 177,2 g**.

Multiplizieren und Dividieren

Beim **Multiplizieren und Dividieren** von Messwerten mit unterschiedlicher **Ziffernzahl** ist das Ergebnis nur mit so vielen Ziffern anzugeben, wie der Messwert mit der kleinsten Anzahl signifikanter Ziffern besitzt.

Beispiel:

Welche Masse haben 50,0 mL Schwefelsäure, deren Dichte zu
ϱ = 1,203 g/mL bestimmt wurde?
Geben Sie die Masse mit der richtigen Anzahl an Ziffern an.

Lösung:

$\varrho = m/V \rightarrow m = V \cdot \varrho$; Rein rechnerisch ergibt sich
m = 50,0 mL · 1,203 g/mL = 60,150 g.
Die Volumenmessgrösse 50,0 mL hat mit 3 signifikanten Ziffern gegenüber der Dichte mit 4 signifikanten Ziffern die geringere Genauigkeit. Das Ergebnis ist deshalb nur mit 3 signifikanten Ziffern anzugeben. Das Rechenergebnis wird in der 3. Ziffer aufgerundet und lautet: ***m* = 60,2 g**.

Notizen

Ausbildungsverbund aprentas

aprentas ist der Ausbildungsverbund für Grund- und Weiterbildung in naturwissenschaftlichen, technischen und kaufmännischen Berufen. Heute bilden über 70 Mitgliedfirmen gemeinsam mit aprentas ihre rund 500 Lernenden in 15 verschiedenen Berufen aus.

Schnuppern und Informieren

Gerne informiert dich aprentas über diese Berufe. Und du kannst bei uns unverbindlich schnuppern. Mehr zu den Info-Veranstaltungen und Schnuppertagen findest du unter **www.aprentas.com.**

Lehrstellen

Wenn du dich für eine Lehrstelle interessierst, richtest du deine Bewerbung direkt an eine der Mitgliedfirmen. Eine aktuelle Übersicht über Berufe und Firmen findest du auf **www.aprentas.com** unter Berufsausbildung auf unserem Lehrstellenbarometer.

Lehrberufe

Naturwissenschaftliche Berufe (Chemieberufe)

Laborant/-in EFZ, Fachrichtung Biologie
Laborant/-in EFZ, Fachrichtung Chemie
Chemie- und Pharmatechnologe/-technologin EFZ
Logistiker/-in EFZ

Technische Berufe

Anlagen- und Apparatebauer/-in EFZ
Automatiker/-in EFZ
Automatikmonteur/-in EFZ
Elektroniker/-in EFZ
Informatiker/-in EFZ
Kältesystem-Monteur/-in EFZ
Konstrukteur/-in EFZ
Polymechaniker/-in EFZ
Produktionsmechaniker/-in EFZ

Kaufmännische Berufe

Büroassistent/-in EBA
Kauffrau/Kaufmann EFZ

aprentas

AUSBILDUNGSVERBUND BERUFLICHE GRUND- UND WEITERBILDUNG
NATURWISSENSCHAFTLICH, TECHNISCH, KAUFMÄNNISCH